

Fonctions Primitives

Définition: F est une primitive de f sur un intervalle $I \iff \begin{cases} F \text{ est dérivable sur } I \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

Conséquence: Toute fonction f continue sur I admet au moins une primitive F qui sera dérivable sur I et telle que $F'(x) = f(x)$.

Théorème: si F et G sont deux primitives sur un intervalle I , d'une même fonction f alors $F(x) = G(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Corollaire: Soit f une fonction continue et soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

Primitives Usuelles & Opérations

$f = F'$	$F + c^{te}$	$f = F'$	$F + c^{te}$	$f = F'$	$F + c^{te}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\lambda u'$	λu	$\sin(ax)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax)$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$\cos(ax)$	$\frac{1}{a} \sin(ax)$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x\sqrt{x}$	$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$	$1+\tan^2(ax)$	$\frac{1}{a} \tan(ax)$
λx^n ($n \neq -1$)	$\frac{\lambda}{n+1} x^{n+1}$	$\lambda u' u^n$ ($n \neq -1$)	$\frac{\lambda}{n+1} u^{n+1}$	$1+\cot^2(ax)$	$-\frac{1}{a} \cotan(ax)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	$\tan(ax)$	$-\frac{1}{a} \ln \cos(ax) $
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax}$	$u' e^u$	e^u	$\cotan(ax)$	$\frac{1}{a} \ln \sin(ax) $
$\ln x$	$x \ln x - x$	$\lambda \cdot g' \cdot f \circ g$	$\lambda \cdot f \circ g$	$f^n ; \sqrt{f}, f $ $\frac{1}{f}, (f \times g), \frac{f}{g},$ $f \circ g \dots$	PAS DE FORMULES

Bac MATH Série N° 09 Fonctions Primitives

Exercice N° 01 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f en précisant son domaine de continuité :

$$\int \lambda x^n = \frac{\lambda}{n+1} x^{n+1} + C^{te} \quad \text{avec } n \neq -1$$

$$1) f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \quad 2) f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x + 5$$

$$3) f(x) = 5x^4 - x^3 - 4x^2 + x - 1 \quad 4) f(x) = x^2 - 3x - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}$$

$$5) f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x^4} \quad 6) f(x) = \frac{x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 3}{x^2}$$

$$7) f(x) = 2x^2 - 5x + 3 - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad 8) f(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 3$$

$$9) f(x) = \sqrt[3]{x} + 3\sqrt[5]{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \quad 10) f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[4]{x} - 4\sqrt[5]{3x}$$

$$\int \lambda u' u^n = \frac{\lambda}{n+1} u^{n+1} + C^{te} \quad \text{avec } n \neq -1$$

$$11) f(x) = (2x+1)(x^2+x)^3 \quad 12) f(x) = (8x-2)(2x^2-x)^4$$

$$13) f(x) = (x-1)^4 \cdot \sqrt{x-1} \quad 14) f(x) = (2x+4)^3 \cdot \sqrt{x+2}$$

$$15) f(x) = \frac{3x-6}{(x^2-4x-5)^7} \quad 16) f(x) = \frac{x^2-x}{(2x^3-3x^2+1)^5}$$

$$17) f(x) = \frac{x+5}{(x-3)^5} \quad 18) f(x) = \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{4+x}{2x}}$$

$$19) f(x) = x \cdot \sqrt{2x-3} \quad 20) f(x) = (x^2+x)\sqrt{x-1}$$

$$\int \lambda \frac{u'}{u^2} = -\frac{\lambda}{u} + C^{te}$$

$$20) f(x) = \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2} \quad 21) f(x) = \frac{6x-18}{(x^2-6x+5)^2}$$

$$22) f(x) = \frac{1-x}{(x^2-2x+2)^2} \quad 23) f(x) = \frac{6x-18}{(x^2-6x+5)^2}$$

$$24) f(x) = \frac{12x^3-20x^2+11x+2}{(2x-1)^2} \quad \text{(On écrira } f(x) = ax + b + \frac{c}{(2x-1)^2}\text{)}$$

$$25) f(x) = \frac{-x^3+7x^2-16x+10}{(x-2)^2} \quad 26) f(x) = \frac{x^4-7x^3+13x^2-9x}{(x-1)^2}$$

$$\int \lambda \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \lambda \sqrt{u} + C^{te}$$

$$27) f(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}} \quad 28) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$29) f(x) = \frac{x^2-2x+3}{5\sqrt{-x^2+3x^2-9x}} \quad 30) f(x) = \frac{x(4x^2-1)}{\sqrt{2x^4-x^2+7}}$$

$$31) f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x-2}} \quad 32) f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{3x-1}}$$

$$\int \cos(ax) = \frac{1}{a} \sin(ax) + C^{te}$$

$$\int \sin(ax) = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C^{te}$$

$$\int 1 + \tan^2(ax) = \int \frac{1}{\cos^2(ax)} = \frac{1}{a} \tan(ax) + C^{te}$$

$$\int 1 + \cotan^2(ax) = \int \frac{1}{\sin^2(ax)} = -\frac{1}{a} \cotan(ax) + C^{te}$$

$$33) f(x) = 3 \cos(2x) - 5 \sin(3x) + \tan^2(4x) + 1$$

$$34) f(x) = -\cos(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) - 1 + 3 \cos^2(3x)$$

$$35) f(x) = \frac{1}{\cos^2(2x)} - 2 \sin(4x) - 5 \sin^2(x)$$

$$36) f(x) = 2x + 5 + \tan^2(2x) \quad 37) f(x) = \cos(3x) \cdot \sin^2(3x)$$

$$38) f(x) = \cos(2x) - \cos^3(2x) \quad 39) f(x) = \sin(5x) \cdot \cos^4(5x)$$

$$40) f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sin^2(2x)} \quad 41) f(x) = \frac{\sin x}{(3\cos x - 4)^5}$$

$$42) f(x) = \frac{\cos x}{1 - \cos(2x)} \quad 43) f(x) = \frac{3 \sin x}{1 + \cos(2x)}$$

$$44) f(x) = \frac{1}{\tan^2 x} - 3x \quad 45) f(x) = \frac{3 \tan^2 x - 2 \tan x + 5}{\cos^2 x}$$

$$46) f(x) = \tan^{3n+1}(x) + \tan^{3n-1}(x) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

$$47) f(x) = \sin^3 x - \cos^2 x + 2 \sin(3x) + 4 \sin^2(2x)$$

$$48) f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(4x) \quad 49) f(x) = \cos(3x) \cdot \sin(6x)$$

$$50) f(x) = \sin^5 x \quad 51) f(x) = \cos^6(2x)$$

$$\int \lambda g' \cdot f' \circ g = \lambda f \circ g + C^{te}$$

$$52) f(x) = (2x-1) \cos(x^2-x) \quad 53) f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}}$$

$$54) f(x) = \cos(3x) \cdot \sin[2 \sin(3x)] \quad 55) f(x) = \frac{1}{x^2} \cos\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$56) f(x) = \frac{8x-12}{\sqrt{x^2-3x}} \sin(\sqrt{x^2-3x}) \quad 57) f(x) = \frac{\cos[\tan(2x)]}{\cos^2(2x)}$$

Exercice N° 02 :

On considère la fonction $f(x) = \frac{2x}{x+\sqrt{x^2+1}}$

1) Déterminer les domaines de définition et de continuité de f

2) Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(0) = 3$

Exercice N° 03 :

On considère la fonction $f(x) = \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x}$

1) Déterminer le domaine de continuité de la fonction f

2) Montrer que $\forall x \in D_f$ on a $f(x) = 4 \sin x (1 - \cos x)$

3) Dédurre la primitive F sur $[0, \pi[$ de f qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$

Exercice N° 04 : Soient les fonctions définies

$$\text{sur } \mathbb{R} \text{ par : } g(x) = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^3}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et } h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$$

- 1) Montrer que les fonctions g et h sont continues sur $\mathbb{R}$
- 2) Calculer la fonction dérivée de $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$
- 3) En déduire des primitives G et H sur $\mathbb{R}$ des fonctions g et h .

Exercice N° 05 : Soit $f(x) = x\sqrt{3-2x}$

- 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f
- 2) Soit la fonction $g(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$
Déterminer les réels a, b et c pour lesquels la fonction g soit une primitive de la f

Exercice N° 06 : Soit $f(x) = \frac{3x+2}{(x-1)^3}$; $\forall x \neq 1$

- 1) Posons $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3}$; $\forall x \neq 1$
avec a, b et c trois constantes réelles.
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)^3 f(x)]$. Déduire que $c = 5$
 - b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)f(x)]$. Déduire que $a = 0$
 - c) Montrer que $b = 3$
- 2) a) Déterminer la primitive F de f sur $]-\infty, 1[$ qui s'annule en 0.
b) Dresser le tableau de variation de la fonction F .

Exercice N° 07 :

$$\text{Soit la fonction } f \text{ définie par : } f(x) = \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x) \cdot \sin(3x)}{\sqrt{\cos(2x)}}$$

- 1) Déterminer le domaine de continuité de f et déduire que f admet une primitive F sur son domaine.
- 2) Montrer que : $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
Exprimer alors : $\sin x \cdot \sin(3x)$ en fonction de $\cos(2x)$
- 3) Déduire une primitive F de f qui s'annule en 0

Exercice N° 08 : Soit $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$

- 1) a) Montrer que f est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[0, \sqrt{2}]$.
b) Montrer que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $]0, \sqrt{2}[$ et calculer $(f^{-1})'(x)$
- 2) On définit sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ la fonction : $g(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$
On note G la primitive de g sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ / $G(0) = 0$.
 - a) On pose $\varphi(x) = G(x) + G(-x)$. Calculer $\varphi'(x)$
En déduire que la fonction G est impaire.
 - b) Montrer que $\forall x \in [0, \sqrt{2}[$; $G(x) = \pi - f^{-1}(x)$.

Exercice N° 09 :

- 1) a) Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ admet sur $]-1, +\infty[$ une unique primitive F qui s'annule en 0.
b) Donner le tableau de signe de la fonction F .

2) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{\sin x}{3+\cos x}$ admet une unique primitive G qui s'annule en 0.

- 3) On pose $\varphi(x) = G(x) - G(-x)$; $\forall x \in [-\pi, \pi]$
Calculer $\varphi'(x)$. Déduire que G est une fonction paire.
- 4) a) Expliciter $G(x)$ en utilisant la fonction F
b) L'équation $G(x) = F(3)$ admet-elle des solutions sur $[-\pi, \pi]$?

Exercice N° 10 :

- 1) Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ admet une seule primitive F sur $[-2, 2]$ qui s'annule en 0.
- 2) $\forall x \in [-2, 2]$, on pose $\varphi(x) = F(x) + F(-x)$
Calculer $\varphi'(x)$ et déduire que F est une fonction impaire
- 3) Soit la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par $g(x) = F(2 \cos x)$
 - a) Montrer que $\forall x \in [0, \pi]$, $g'(x) = 2(\cos 2x - 1)$
 - b) Calculer $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Déduire l'expression de $g(x)$; $\forall x \in [0, \pi]$
- 4) Calculer $F(2)$. Etudier les variations de la fonction F .

Exercice N° 11 : Soit $f(x) = \frac{x}{4+\cos x}$

- 1) Montrer que la fonction f admet sur $\mathbb{R}$ une seule primitive qui s'annule en 0. On notera F cette primitive.
- 2) a) Montrer que $g(x) = F(x) - F(-x)$ est constante sur $\mathbb{R}$
b) Etudier donc la parité de la fonction F
- 3) a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+ ; \frac{1}{6}t \leq f(t) \leq t$
b) En déduire que $\forall x \geq 0 ; \frac{1}{12}x^2 \leq F(x) \leq \frac{1}{2}x^2$.
- 4) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Montrer que la courbe C_f admet une branche parabolique infinie de direction $(O\vec{j})$
- 5) Dresser les variations de F et construire sa courbe C_f

Exercice N° 12 : Soit $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$

- 1) Montrer que f admet une unique primitive F sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en -1
- 2) Soit (Γ) la courbe représentative de F
 - a) Etudier le sens de variation de la fonction φ définie par : $\varphi(x) = F(-2-x) + F(x)$
 - b) En déduire que le point $I(-1, 0)$ est un centre de symétrie de (Γ)
- 3) On pose $\forall x \in]-1; +\infty[$; $G(x) = F\left(\frac{-x}{x+1}\right) + F(x)$
Calculer $G'(x)$ et en déduire que $G(x) = 2F(0)$
- 4) Soit H définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $H(x) = F(\tan x - 1)$
 - a) Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $H(x) = x$.
 - b) En déduire que $G(0) = \frac{\pi}{2}$
- 5) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de (Γ) .

Fonctions Primitives

Exercice N° 01:

$$(1) f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + k$$

$$(2) f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x + 5 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 5x + k$$

$$(3) f(x) = 5x^4 - x^3 - 4x^2 + x - 1 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$F(x) = x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + k$$

$$(4) f(x) = x^2 - 3x - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} \quad D_f = \mathbb{R}^*$$

$$f(x) = x^2 - 3x - x^{-3} + 2(x^{-2})$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{-2}x^{-2} + \frac{2}{-1}x^{-1} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} + k$$

$$(5) f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x^4} \quad D_f = \mathbb{R}^*$$

$$f(x) = 2x + 3 - x^{-4}$$

$$\Rightarrow F(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{-3}x^{-3} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{3x^3} + k$$

$$(6) f(x) = \frac{x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 3}{x^2} \quad D_f = \mathbb{R}^*$$

$$f(x) = x^3 - 5x + 2 + 3\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{x} + k$$

$$(7) f(x) = 2x^2 - 5x + 3 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad D_f =]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x - 2\sqrt{x} + k$$

$$(8) f(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 3 \quad D_f =]0, +\infty[$$

$$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 3x + k$$

$$\text{car } \int \sqrt{x} = \int x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$$

$$(9) f(x) = \sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \quad D_f = \mathbb{R}^*$$

$$f(x) = (x)^{\frac{1}{3}} + 3(x)^{\frac{1}{2}} + 6\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{4}{3}}(x)^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{\frac{6}{5}}(x)^{\frac{5}{2}} + 6\sqrt{x} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} + 6\sqrt{x} + k$$

$$(10) f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[4]{x} - 4\sqrt[5]{3x} \quad D_f = \mathbb{R}^*$$

$$f(x) = -2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 2(x)^{\frac{1}{4}} - 4\sqrt[5]{3}(x)^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow F(x) = -2\sqrt{x} + \frac{2}{\frac{5}{4}}x^{\frac{5}{4}} - \frac{4\sqrt[5]{3}}{\frac{6}{5}}x^{\frac{6}{5}} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = -2\sqrt{x} + \frac{8}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{10\sqrt[5]{3}}{3}x^{\frac{6}{5}} + k$$

$$(11) f(x) = \left(\frac{2x+1}{u}\right)(x^2+x)^3 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}(x^2+x)^4 + k$$

$$(12) f(x) = (8x-2)(2x^2-x)^4 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(4x-1)(2x^2-x)^4 = 2u' \cdot u^4$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2}{5}(2x^2-x)^5 + k$$

$$(13) f(x) = (x-1)^4\sqrt{x-1} \quad D_f = [1, +\infty[$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^4(x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{9}{2}}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\frac{11}{2}}(x-1)^{\frac{11}{2}} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2}{11}(x-1)^{\frac{11}{2}} \cdot \sqrt{x-1} + k$$

$$(14) f(x) = (2x+4)\sqrt{x+2} \quad D_f = [-2, +\infty[$$

$$\Rightarrow f(x) = 2^3 (x+2)^3 (x+2)^{\frac{1}{2}} = 8(x+2)^{\frac{7}{2}}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{8}{\frac{9}{2}} (x+2)^{\frac{9}{2}} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{16}{9} (x+2)^4 \sqrt{x+2} + k$$

$$15) f(x) = \frac{3x-6}{(x^2-4x-5)^7}$$

$$\text{il faut que } x^2-4x-5 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$$

$$f(x) = 3(x-2)(x^2-4x-5)^{-7}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} (2x-4)(x^2-4x-5)^{-7}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{\frac{3}{2}}{-6} (x^2-4x-5)^{-6} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{-9}{(x^2-4x-5)^6} + k$$

$$16) f(x) = \frac{x^2-x}{(2x^3-3x^2+1)^5}$$

$$\text{il faut que } 2x^3-3x^2+1 \neq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x^2-x-1) \neq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-1)(2x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 1\}$$

$$f(x) = 6(x^2-x)(2x^3-3x^2+1)^{-5} \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{6} (6x^2-6x)(2x^3-3x^2+1)^{-5}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{\frac{1}{6}}{-4} (2x^3-3x^2+1)^{-4} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{24(2x^3-3x^2+1)^4} + k$$

$$17) f(x) = \frac{x+5}{(x-3)^5} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x-3)+8}{(x-3)^5} = (x-3)^{-4} + 8(x-3)^{-5}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{-3} (x-3)^{-3} + \frac{8}{-4} (x-3)^{-4} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{3(x-3)^3} - \frac{2}{(x-3)^4} + k$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-(x-3)-6}{3(x-3)^4} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{-x-3}{3(x-3)^4} + k$$

$$18) f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{\frac{4+x}{2x}} \text{ il faut que } \frac{4+x}{2x} \geq 0$$

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$\frac{4+x}{2x}$	-	0	+	+
$\frac{4+x}{2x}$	-	0	+	+

$$\Rightarrow D_f =]-\infty, -4] \cup]0, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{-2}{x^2}\right) \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 u' \cdot u^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3} \left(\frac{4+x}{2x}\right) \cdot \sqrt{\frac{4+x}{2x}} + k$$

$$19) f(x) = x\sqrt{2x-3} \quad D_f = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} (2x-3+3)(2x-3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} (2x-3)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} (2x-3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} (2x-3)^{\frac{5}{2}} + \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} (2x-3)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$= \frac{1}{5} (2x-3)^2 \sqrt{2x-3} + \frac{1}{2} (2x-3) \sqrt{2x-3} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \left(\frac{4}{5}x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5}\right) \sqrt{2x-3} + k$$

$$20) f(x) = (x^2+x)\sqrt{x-1} \quad D_f = [1, +\infty[$$

$$f(x) = ((x^2-2x+1) + (3x-3) + 2) \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2 \sqrt{x-1} + 3(x-1) \sqrt{x-1} + 2(2-1) \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^{\frac{5}{2}} + 3(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(2-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{7}{2}} (x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{3}{\frac{5}{2}} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{\frac{3}{2}} (x-1)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2}{7} (x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{6}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \left[\frac{2}{7} (x-1)^3 + \frac{6}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}}\right] \sqrt{x-1} + k$$

(20) $f(x) = \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{x^2-3x+2} + k$

(21) $f(x) = \frac{6x-18}{(x^2-6x+5)^2}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 5\} \Rightarrow f(x) = -x+3 + \frac{-2}{(x-2)^2}$

$\Rightarrow f(x) = 3 \left[\frac{2x-6}{(x^2-6x+5)^2} \right] = 3 \cdot \frac{u'}{u^2}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{-3}{x^2-6x+5} + k$

(22) $f(x) = \frac{1-x}{(x^2-2x+2)^2}$ $D_f = \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u'}{u^2}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2x^2-4x+4} + k$

also $F(x) = \frac{1}{2x^2-4x+4} + k$

(23) $f(x) = \frac{12x^3 - 20x^2 + 11x + 2}{(2x-1)^2}$

$f(x) = \frac{(ax+b)(2x-1)^2 + c}{(2x-1)^2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{(ax+b)(4x^2-4x+1) + c}{(2x-1)^2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{4ax^3 + (4b-4a)x^2 + (a-4b)x + (b+c)}{(2x-1)^2}$

par identifi. $\begin{cases} 4a = 12 \Rightarrow a = 3 \\ 4b-4a = -20 \Rightarrow b = -2 \\ a-4b = 11 \text{ vérifié} \\ b+c = 2 \Rightarrow c = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = 3x - 2 + \frac{4}{(2x-1)^2}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{2}{2x-1} + k$

(25) $f(x) = \frac{-x^3+7x^2-16x+10}{(x-2)^2}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\begin{array}{r|l} -x^3+7x^2-16x+10 & x^2-4x+4 \\ -x^3+4x^2-4x & -x+3 \\ \hline 3x^2-12x+10 & \\ 3x^2-12x+12 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = -x+3 + \frac{-2}{(x-2)^2}$

also $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{2}{x-2} + k$

(26) $f(x) = \frac{x^4-7x^3+13x^2-9x}{(x-1)^2}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\begin{array}{r|l} x^4-7x^3+13x^2-9x & x^2-2x+1 \\ x^4-2x^3+x^2 & x^2-5x+2 \\ \hline -5x^3+12x^2-9x & \\ -5x^3+10x^2-5x & \\ \hline 2x^2-4x & \\ 2x^2-4x+2 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = x^2-5x+2 - \frac{2}{(x-1)^2}$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + \frac{2}{x-1} + k$

(27) $f(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$ $D_f =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

$f(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \Rightarrow F(x) = \sqrt{u} + k$

$\Rightarrow F(x) = \sqrt{x^2-x-2} + k$

(28) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ $D_f =]-\infty, \frac{1}{2}[$

$f(x) = -\left[\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} \right] = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

$\Rightarrow F(x) = -\sqrt{1-2x} + k$

(29) $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{5\sqrt{-x^3+3x^2-9x}}$

il faut que $-x^3+3x^2-9x > 0$

$\Leftrightarrow -x(x^2-3x+9) > 0$

$\Leftrightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow D_f =]-\infty, 0[$

$$f(x) = \frac{-2 \left[\frac{-3x^2 + 6x - 9}{2\sqrt{-x^3 + 3x^2 - 9x}} \right]}{45} = d. \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$d'u: \boxed{F(x) = -\frac{2}{45} \sqrt{-x^3 + 3x^2 - 9x} + k}$$

30) $f(x) = \frac{x(4x^2 - 1)}{\sqrt{2x^4 - x^2 + 7}} \quad D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{8x^3 - 2x}{2\sqrt{2x^4 - x^2 + 7}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \sqrt{2x^4 - x^2 + 7} + k}$$

31) $f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x-2}} = \frac{x-2+6}{\sqrt{x-2}}$

$$f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{6}{\sqrt{x-2}} \quad D_f =]2, +\infty[$$

$$F(x) = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2} + 12\sqrt{x-2} + k$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{32}{3}\right)\sqrt{x-2} + k}$$

32) $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{3x-1}} \quad D_f =]\frac{1}{3}, +\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1) + 7}{\sqrt{3x-1}}$$

$$= \frac{1}{3}(3)(3x-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{3}(3)(3x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\frac{3}{2}} (3x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2} (3x-1)^{\frac{1}{2}} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2}{27} (3x-1)\sqrt{3x-1} + \frac{14}{3} \sqrt{3x-1} + k$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \left(\frac{2}{9}x + \frac{124}{27}\right)\sqrt{3x-1} + k}$$

33) $f(x) = 3\cos(2x) - 5\sin(3x) + \frac{\ln^2(4x)}{4} + 1$

il faut que $4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$

$$\boxed{F(x) = \frac{3}{2}\sin(2x) + \frac{5}{3}\cos(3x) + \frac{1}{4}\ln(4x) + k}$$

34) $f(x) = -\cos x + \frac{1}{2}\sin(2x) - 1 + 3\cos^2(3x)$

$$\Rightarrow f(x) = -\cos x + \frac{1}{2}\sin(2x) - 1 + 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(6x)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\cos x + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{3}{2}\cos(6x) + \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = -\sin x - \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{3}{12}\sin(6x) + \frac{1}{2}x + k}$$

35) $f(x) = \frac{1}{\cos^2(2x)} - 2\sin(4x) - 5\sin^2(x)$

il faut que $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$$f(x) = 1 + \tan^2(2x) - 2\sin(4x) - 5\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \tan^2(2x) - 2\sin(4x) + \frac{5}{2}\cos(2x) - \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{1}{2}\tan(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{5}{4}\sin(2x) - \frac{5}{2}x + k}$$

36) $f(x) = 2x + 5 + \tan^2(2x)$

il faut que $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$$f(x) = 2x + 5 + (1 + \tan^2(2x))$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = x^2 + 4x + \frac{1}{2}\tan(2x) + k}$$

37) $f(x) = \cos(3x) \cdot [\sin(3x)]^2 \quad D_f = \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} [3\cos(3x)] [\sin(3x)]^2 = du' \cdot u^n$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{1}{9} \sin^3(3x) + k}$$

38) $f(x) = \cos(2x) - \cos^3(2x) \quad D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \cos(2x) \cdot [1 - \cos^2(2x)]$$

$$= \frac{1}{2} (2\cos(2x)) \cdot [\sin(2x)]^2 = du' \cdot u^2$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} \sin^3(2x) + k = \frac{1}{6} \sin^3(2x) + k$$

oncl: $\boxed{F(x) = \frac{1}{6} \sin^3(2x) + k}$

39) $f(x) = \sin(5x) \cdot \cos^4(5x) \quad D_f = \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{5} [5\sin(5x)] [\cos(5x)]^4$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = -\frac{1}{25} \cos^5(5x) + k}$$

40) $f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sin^2(2x)} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cos(2x)}{[\sin(2x)]^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'}{u^2}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{2 \sin(2x)} + k$$

$$(41) f(x) = \frac{\sin x}{(3 \cos x - 4)^5} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3} (-3 \sin x) (3 \cos x - 4)^{-5}$$

$$F(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{-4} (3 \cos x - 4)^{-4} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{12 (3 \cos x - 4)^4} + k$$

$$(42) f(x) = \frac{\cos x}{1 - \cos(2x)} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 - (1 - 2 \sin^2 x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{\sin x} + k$$

$$(43) f(x) = \frac{3 \sin x}{1 + \cos(2x)} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$$

$$f(x) = \frac{3 \sin x}{1 + [2 \cos^2 x - 1]} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{-\sin x}{(\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{3}{2 \cos x} + k$$

$$(44) f(x) = \frac{1}{\tan^2 x} - 3x \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}$$

$$f(x) = (\cot^2 x + 1) - 1 - 3x$$

$$\Rightarrow F(x) = -\cot x - x - \frac{3}{2} x^2 + k$$

$$(45) f(x) = \frac{3 \tan^2 x - 2 \tan x + 5}{\cos^2 x} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} + k\pi\}$$

$$f(x) = 3 \left(\frac{1}{\cos x}\right) \tan^2 x - 2 \left(\frac{1}{\cos x}\right) \tan x + 5 \left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \tan^3 x - \tan^2 x + 5 \tan x + k$$

$$(46) f(x) = \tan^{3n+1}(x) + \tan^{3n}(x) \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$$

$$f(x) = (\tan x)^{3n+1} (1 + \tan^2 x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3n} (\tan x)^{3n} + k \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

$$(47) f(x) = \sin^3 x - \cos^2 x + 2 \sin(3x) + 4 \sin^2(2x)$$

$$f(x) = \sin x (\sin^2 x) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4x)\right) + 2 \sin(3x) + 4 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x)\right]$$

$$f(x) = \sin x - \sin x (\cos^2 x) - \frac{1}{2} \cos(4x) + 2 \sin(3x) - 2 \cos(4x) + \frac{3}{2} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow F(x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{1}{4} \sin(4x) - \frac{3}{2} \cos(3x) - \frac{1}{2} \sin(4x) + \frac{3}{2} x + k$$

$$(48) f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(4x) \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$= \sin(2x) [2 \cos^2(2x) - 1]$$

$$\Rightarrow f(x) = -(-2 \sin(2x)) \cdot [\cos(2x)]^2 - \sin(2x)$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3} \cos^3(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + k$$

$$(49) f(x) = \cos(3x) \cdot \sin(6x) \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \sin(3x) \cos^2(3x)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3} (-3 \sin(3x)) [\cos(3x)]^2$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{2}{9} \cos^3(3x) + k$$

$$(50) f(x) = (\sin x)^5 = \sin x (\sin^2 x)^2 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin x \cdot (1 - \cos^2 x)^2$$

$$= \sin x (1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin x + 2(-\sin x)(\cos x) - (\sin x)(\cos^4 x)$$

$$\Rightarrow F(x) = -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} (\cos x)^5 + k$$

$$(51) f(x) = (\cos 2x)^6 = \left[\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right]^6 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{64} [e^{i2x} + e^{-i2x}]^6$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{64} \left(e^{12ix} + 6e^{8ix} + 15e^{4ix} + 20 + 15e^{-4ix} + 6e^{-8ix} + e^{-12ix} \right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{64} \left(e^{12ix} + e^{-12ix} + 6(e^{8ix} + e^{-8ix}) + 15(e^{4ix} + e^{-4ix}) + 20 \right)$$

$$= \frac{1}{64} \left(2\cos(12x) + 12\cos(8x) + 30\cos(4x) + 20 \right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{32} \cos(12x) + \frac{3}{16} \cos(8x) + \frac{15}{32} \cos(4x) + \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{12} \sin(12x) + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{8} \sin(8x) + \frac{15}{32} \cdot \frac{1}{4} \sin(4x) + \frac{5}{16}x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{384} \sin(12x) + \frac{3}{128} \sin(8x) + \frac{15}{128} \sin(4x) + \frac{5}{16}x + k$$

52) $f(x) = (2x-1) \cdot \cos(x^2-x)$ $D_{\leq} = \mathbb{R}$

$$\Rightarrow F(x) = \sin(x^2-x) + k$$

53) $f(x) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) \sin(\sqrt{x-1})$ $D_{\leq} =]1, +\infty[$

$$\Rightarrow F(x) = -2 \cos(\sqrt{x-1}) + k$$

54) $f(x) = \cos(3x) \cdot \sin[2\sin(3x)]$ $D_{\leq} = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{6} (-6 \cos(3x)) \cdot \sin[2\sin(3x)]$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{6} \cos(2\sin(3x)) + k$$

55) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cos\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ $D_{\leq} = \mathbb{R}^*$

$$f(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = -\sin\left(1 + \frac{1}{x}\right) + k$$

56) $f(x) = \frac{8x-12}{\sqrt{x^2-3x}} \sin(\sqrt{x^2-3x})$ $D_{\leq} =]-\infty, 0] \cup]3, +\infty[$

$$f(x) = 8 \left(\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}} \right) \sin(\sqrt{x^2-3x})$$

$$\Rightarrow F(x) = -8 \cos(\sqrt{x^2-3x}) + k$$

57) $f(x) = \frac{\cos(\tan(2x))}{\cos^2(2x)}$ $D_{\leq} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\cos^2(2x)} \cos(\tan(2x))$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \sin(\tan(2x)) + k$$

Exercice N°2 :

$$f(x) = \frac{2x}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

1) f existe et continue sur $\left. \begin{array}{l} x^2+1 \geq 0 \\ x + \sqrt{x^2+1} \neq 0 \end{array} \right\}$

$$\text{or } \forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 > 0$$

$$\text{et } x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > |x|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} > -x \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} > 0$$

$$\sqrt{x^2+1} > x$$

$$\text{also } \forall x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{x^2+1} \neq 0$$

$$\text{Conclusion : } D_f = D_{\leq} = \mathbb{R}$$

2) $f(x) = \frac{(2x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{(x+\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1}-x)}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{x^2+1} - 2x^2}{x^2+1 - x^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} - 2x^2$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} x^3 + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2}{3} (x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \frac{2}{3} x^3 + k$$

$$\text{or } F(0) = 3 \Rightarrow \frac{2}{3} + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Conclusion : } F(x) = \frac{2}{3} (x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{3}$$

Exercice N°3 :

$$f(x) = \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x}$$

1) f existe et continue sur $1 + \cos x \neq 0$

$$\Rightarrow \cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi$$

$$\Rightarrow D_{\leq} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi\}$$

2) $f(x) = \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} = \frac{4 \sin x (\sin^2 x)}{1 + \cos x}$

$$f(x) = \frac{4 \sin x (1 - \cos^2 x)}{1 + \cos x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4 \sin x \cdot (1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)}$$

$$\Rightarrow \forall x \in D_f; \boxed{f(x) = 4 \sin x (1 - \cos x)}$$

$$3) f(x) = 4 \cdot \sin x \cdot (1 - \cos x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{4}{2} (1 - \cos x)^2 + k$$

$$\Rightarrow F(x) = 2(1 - \cos x)^2 + k$$

$$\text{or } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2 + k = 0 \Rightarrow k = -2$$

$$\text{also } F(x) = 2(1 - 2\cos x + \cos^2 x) - 2$$

$$\text{also } \boxed{F(x) = 2\cos^2 x - 4\cos x}$$

Exercice N° 4:

$$g(x) = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})}$$

$$1) \text{ on a } \forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0 \Rightarrow x + \sqrt{1+x^2} \neq 0$$

g et h sont continues sur $\mathbb{R}$

$$2) f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$

$$\text{Comme } \forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$3) g(x) = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})^3}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right) (x + \sqrt{1+x^2})^2$$

$$\Rightarrow g(x) = f'(x) [f(x)]^2$$

$$\Rightarrow G(x) = \frac{1}{3} [f(x)]^3 + k$$

$$\Rightarrow \boxed{G(x) = \frac{1}{3} (x + \sqrt{1+x^2})^3 + k}$$

$$\bullet h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})} = \frac{\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{(x + \sqrt{1+x^2})^2}$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$\Rightarrow H(x) = -\frac{1}{f(x)} + k$$

$$\Rightarrow \boxed{H(x) = \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}} + k}$$

Exercice N° 5:

$$f(x) = x\sqrt{3-2x}$$

$$1) f \text{ est } \subseteq \text{ sur } 3-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{D_f =]-\infty, \frac{3}{2}]}$$

$$2) g(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$$

$$g \text{ primitive de } f \Rightarrow g'(x) = f(x)$$

$$\text{or } g'(x) = (2ax + b)\sqrt{3-2x} + (ax^2 + bx + c)\left(\frac{-2}{2\sqrt{3-2x}}\right)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{(2ax + b)(3-2x) - (ax^2 + bx + c)}{\sqrt{3-2x}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{6ax - 4ax^2 + 3b - 2bx - ax^2 - bx - c}{\sqrt{3-2x}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-5ax^2 + (6a - 3b)x + (3b - c)}{\sqrt{3-2x}}$$

$$\text{or } f(x) = x\sqrt{3-2x} = \frac{x(3-2x)}{\sqrt{3-2x}} = \frac{-2x^2 + 3x}{\sqrt{3-2x}}$$

$$\text{donc } g'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -5a = -2 \rightarrow a = \frac{2}{5} \\ 6a - 3b = 3 \rightarrow b = -\frac{1}{5} \\ 3b - c = 0 \rightarrow c = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}\right)\sqrt{3-2x}}$$

Exercice N° 6:

$$f(x) = \frac{3x+2}{(x-1)^3} \quad \forall x \neq 1$$

$$1) f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)^3 f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} [a(x-1)^2 + b(x-1) + c] = c$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)^5 f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{6x+2}{(x-1)^3}\right) (x-1)^5 = 5$$

$$\text{also } \boxed{c = 5}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} [(x-1)f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \right] = a$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0} [(x-1)f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} = 0 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

$$c) f(x) = \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{5}{(x-1)^3} = \frac{b(x-1)+5}{(x-1)^3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{bx + (5-b)}{(x-1)^3} = \frac{3x+2}{(x-1)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{b=3} \quad \text{et } 5-b=5-3=2$$

$$2) f(x) = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{5}{(x-1)^3} = 3(x-1)^{-2} + 5(x-1)^{-3}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{3}{-1} (x-1)^{-1} + \frac{5}{-2} (x-1)^{-2} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{3}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)^2} + k$$

$$\text{or } F(0)=0 \Rightarrow 3 - \frac{5}{2} + k = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Concl: } \boxed{F(x) = -\frac{3}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sin(x) \cdot \sin(3x) = -\frac{1}{2} [\cos(4x) - \cos(2x)]$$

$$= -\frac{1}{2} [2\cos^2(2x) - 1 - \cos(2x)]$$

$$\Rightarrow \sin(x) \cdot \sin(3x) = -\cos^2(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$$

$$3) f(x) = \frac{\sin(2x) \cdot \sin(x) \cdot \sin(3x)}{\sqrt{\cos x}}$$

$$f(x) = \frac{\sin(2x) \left[-\cos^2(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} \right]}{\sqrt{\cos x}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin(2x) \left[-\frac{\cos^2(2x)}{\sqrt{\cos x}} + \frac{1}{2} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\cos x}} + \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \right]$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin(2x) \left[-(\cos 2x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(\cos 2x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(\cos 2x)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-2\sin(2x)(\cos 2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}(-2\sin(2x))(\cos 2x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}(-2\sin(2x))(\cos 2x)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} (\cos 2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} (\cos 2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} (\cos 2x)^{\frac{1}{2}} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{5} (\cos 2x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6} (\cos 2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} (\cos 2x)^{\frac{1}{2}} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \left(\frac{1}{5} \cos^2(2x) - \frac{1}{6} \cos(2x) - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\cos 2x} + k$$

$$\text{or } F(0)=0 \Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + k = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{7}{15}$$

$$\text{Concl: } \boxed{F(x) = \left(\frac{1}{5} \cos^2(2x) - \frac{1}{6} \cos(2x) - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\cos 2x} + \frac{7}{15}}$$

Exercice N°7 :

$$f(x) = \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x) \cdot \sin(3x)}{\sqrt{\cos(2x)}}$$

$$1) f \text{ est continue sur } \cos 2x > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

f continue sur $D_f \Rightarrow f$ admet des primitives sur D_f

$$2) \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\Rightarrow \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b$$

$$\Rightarrow \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

Exercice N°8 :

$$f(x) = \sqrt{1+\cos x} \quad D_f = [0, \pi]$$

$$1) a) f \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \pi] \text{ car } 1+\cos x \geq 0$$

$$\text{et } f \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \pi]$$

Étudions la dérivée de f en π^- (il n'y a pas de problème en 0^+)

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1+\cos x} - 0}{x - \pi}$$

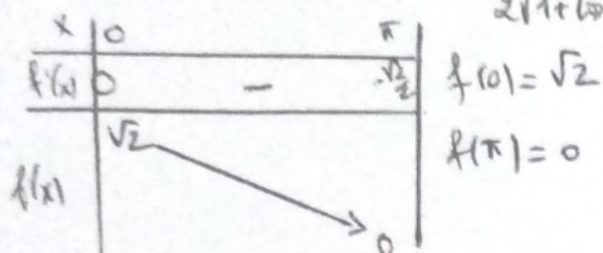
$$\text{on pose } t = x - \pi \Rightarrow x \rightarrow \pi^- \Rightarrow t \rightarrow 0^-$$

$$f = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+\cos(\pi+t)}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos t}}{-t}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{t \rightarrow 0^-} -\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow f \text{ str. } \subseteq \text{ sur } \pi \Rightarrow D_f = [0, \pi]$$

$$\forall x \in [0, \pi], f'(x) = \left(\sqrt{1+\cos x} \right)' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}} \leq 0$$



f continue et strict $\downarrow$ sur $(0, \pi) \Rightarrow f$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[0, \sqrt{2}]$

$$b) f \subseteq \text{ sur }]0, \pi[\Rightarrow f' \subseteq \text{ sur }]0, \sqrt{2}[$$

$$f'(x) \neq 0$$

$$\cdot (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{-\sin(y)}{2\sqrt{1+\cos y}}} = -\frac{2\sqrt{1+\cos y}}{\sin y}$$

$$\text{or } f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos y} = x$$

$$\text{donc } 1+\cos y = x^2 \Leftrightarrow \cos y = x^2 - 1$$

$$\text{alors } \sin^2 y = 1 - (\cos y)^2 = 1 - (x^2 - 1)^2 = 2x^2 - x^4 = x^2(2 - x^2)$$

$$\Rightarrow |\sin y| = |x| \cdot \sqrt{2 - x^2}$$

$$\text{or } x \in]0, \sqrt{2}[\Rightarrow |x| = x$$

$$\text{et } y \in]0, \pi[\Rightarrow |\sin y| = \sin y = x \sqrt{2 - x^2}$$

$$\text{donc } (f^{-1})'(x) = \frac{-2x}{x\sqrt{2-x^2}} = \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$\text{concl. : } \forall x \in]0, \sqrt{2}[, \boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}}}$$

$$2) g(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} \quad D_g =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$$

G : primitive de g telle que $G(0) = 0$

$$a) \varphi(x) = G(x) + G(-x) \subseteq \text{ sur }]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$$

$$\varphi'(x) = G'(x) - G'(-x) = g(x) - g(-x)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{2-(-x)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[, \varphi(x) = \varphi(0) = 0$$

$$\text{alors } \forall x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[, \varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow G(x) + G(-x) = 0 \Leftrightarrow G(-x) = -G(x)$$

et comme $(-x) \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\Rightarrow \boxed{G: \text{impaire}}$

$$b) \forall x \in [0, \sqrt{2}[, G'(x) = g(x) = -(f^{-1})'(x)$$

$$\Rightarrow G(x) = -f^{-1}(x) + k$$

$$\text{or } G(0) = 0 \Rightarrow -f^{-1}(0) + k = 0$$

$$\Rightarrow k = f^{-1}(0) = \pi$$

$$\text{concl. : } \forall x \in [0, \sqrt{2}[, \boxed{G(x) = \pi - f^{-1}(x)}$$

Exercice N° 9:

$$1) a) f(x) = \frac{1}{1+x} \quad D_f =]-1, +\infty[$$

f str continue sur $] -1, +\infty[\Rightarrow f$ admet

au moins une primitive F sur $] -1, +\infty[$

or $0 \in] -1, +\infty[$ et $F(0) = 0 \Rightarrow F$: unique

$$b) F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x} > 0 \quad \forall x \in] -1, +\infty[$$

x	-1	0	+
F'		+	
F		0	+

$$2) g(x) = \frac{\sin x}{3+\cos x} \quad D_g = \mathbb{R}$$

g continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow G$ admet au moins

une primitive G dérivable sur $\mathbb{R}$

or $G(0) = 0 \Rightarrow G$ est unique.

$$3) \varphi(x) = G(x) - G(-x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

$$G \subseteq \text{ sur } [-\pi, \pi] \Rightarrow \varphi \subseteq \text{ sur } [-\pi, \pi]$$

$$\varphi'(x) = G'(x) - [-G'(-x)] = g(x) + g(-x)$$

$$= \frac{\sin x}{3+\cos x} + \frac{\sin(-x)}{3+\cos(-x)} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = k = \varphi(0) = G(0) - G(0) = 0$$

$$\text{donc } G(x) - G(-x) = 0 \Leftrightarrow G(-x) = G(x)$$

et comme $(-x) \in [-\pi, \pi] \Rightarrow \boxed{G: \text{paire}}$

$$4) a) g(x) = \frac{\sin x}{3 + \cos x} = \frac{\sin x}{1 + (2 + \cos x)}$$

$$\Rightarrow g(x) = \sin x \cdot \left[\frac{1}{1 + (2 + \cos x)} \right] =$$

$$\Rightarrow g(x) = (\sin x) \cdot f(2 + \cos x) = -(\sin x) \cdot f'(2 + \cos x)$$

$$\Rightarrow G(x) = -F(2 + \cos x) + k'$$

$$\text{or } G(0) = -F(3) + k' = 0$$

$$\Rightarrow k' = F(3)$$

Concl: $\forall x \in [-\pi, \pi]$; $G(x) = F(3) - F(2 + \cos x)$

b) $G(x) = F(3) \Leftrightarrow F(2 + \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -2 \text{ Absurde}$$

$\Rightarrow$ L'éq $G(x) = F(3)$ n'admet pas de solution

Exercice N°10:

1) $f(x) = \sqrt{4 - x^2} \subseteq \text{sur } [-2, 2]$

$\Rightarrow f$ admet au moins une primitive F dérivable sur $[-2, 2]$ or $F(0) = 0$

$\Rightarrow F$ est l'unique primitive de f

2) $\Psi(x) = F(x) + F(-x)$ $D_\Psi = [-2, 2]$

$F \subseteq \text{sur } [-2, 2]$ et $(-x) \in [-2, 2]$

$\Rightarrow \Psi \subseteq \text{sur } [-2, 2]$

$$\Psi'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x)$$

$$= \sqrt{4 - x^2} - \sqrt{4 - x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \Psi(x) = k = \Psi(0) = 0 \quad \forall x \in [-2, 2]$$

d'où $F(x) + F(-x) = 0 \Leftrightarrow F(-x) = -F(x)$

et $(-x) \in [-2, 2] \Rightarrow \boxed{F \text{ est impaire}}$

3) $g(x) = F(2 \cos x)$ $D_g = [0, \pi]$

a) on a: $x \mapsto 2 \cos x \subseteq \text{sur } [0, \pi]$

et $(2 \cos x) \in [-2, 2] = D_F$

$\Rightarrow g$ est dérivable sur $[0, \pi]$

$$g'(x) = [F(2 \cos x)]' = -2 \sin x \cdot F'(2 \cos x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = -2 \sin x \cdot f(2 \cos x) = -2 \sin x \cdot \sqrt{4 - 4 \cos^2 x}$$

$$\Rightarrow g'(x) = -2 \sin x |2 \cos x|$$

or $x \in [0, \pi] \Rightarrow \sin x \geq 0$

$$\Rightarrow g'(x) = -4 \sin^2 x = -4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(x) = 2 [\cos(2x) - 1]} \quad \forall x \in [0, \pi]$$

b) $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = F(0) = 0$

$$g'(x) = 2 \cos(2x) - 2 \Rightarrow$$

$$g(x) = \sin(2x) - 2x + k$$

or $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\pi + k = 0 \Leftrightarrow k = \pi$

Concl: $\forall x \in [0, \pi]$; $\boxed{g(x) = \sin(2x) - 2x + \pi}$

4) $F(2) = F(2 \cos 0) = g(0) = \pi$

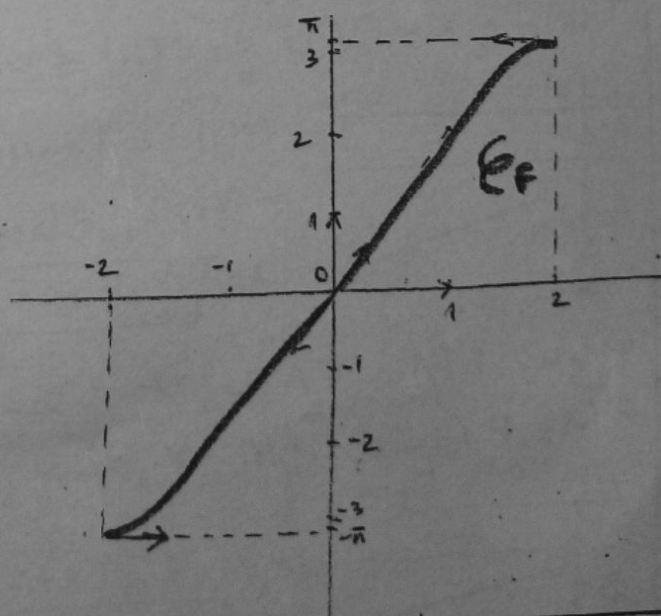
Variations de F : $D_f = [-2, 2]$

F impaire $\Rightarrow D_F = [0, 2]$ et 0: centre de symétrie par $\in F$

$F \subseteq \text{sur } [0, 2]$, $F'(x) = f(x) = \sqrt{4 - x^2} \geq 0$

x	0	2
F'		+
F	0	π

$F'(0) = f(0) = 2$
 $\Rightarrow T_0: y = F'(0)(x - 0) + F(0)$
 $\Rightarrow T_0: y = 2x$



Exercice N° 11 :

$$f(x) = \frac{x}{4 + \cos x} \quad D_f = \mathbb{R}$$

1) f continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admet au moins une primitive F dérivable sur $\mathbb{R}$
 or $F(0) = 0 \Rightarrow F$ est unique

2) a) $g(x) = F(x) - F(-x) \quad D_g = \mathbb{R}$

$F \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \Rightarrow g \text{ est } \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}$

$$g'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) en particulier $g(x) = F(x) - F(0) = 0$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0 \Leftrightarrow F(-x) = F(x)$$

alors f est une fonction paire

3) a) $\forall t \in \mathbb{R}_+; \frac{1}{6}t \leq f(t) \leq t$

$$\text{on a } -1 \leq \cos t \leq 1 \Leftrightarrow 3 \leq 4 + \cos t \leq 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{4 + \cos t} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{1}{4 + \cos t} \leq 1$$

$$\text{or } t \geq 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{6}t \leq f(t) \leq t}$$

b) $\forall x \geq 0, \frac{1}{12}x^2 \leq F(x) \leq \frac{1}{2}x^2$

on pose $A(x) = \frac{1}{12}x^2 - F(x) \quad D_A = \mathbb{R}_+$

$$A'(x) = \frac{1}{6}x - f(x) = \frac{1}{6}x - f(x) \leq 0$$

x	0	$+\infty$
A'	0	-

$$A(0) = 0 : \text{maximum}$$

$$\Rightarrow \forall x \geq 0, A(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{12}x^2 \leq F(x)}$$

on pose $B(x) = F(x) - \frac{1}{2}x^2 \quad D_B = \mathbb{R}_+$

$$B'(x) = f(x) - x = f(x) - x \leq 0$$

x	0	$+\infty$
B'	0	-

$$B(0) = F(0) - 0 = 0 : \text{maximum}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, B(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) \leq \frac{1}{2}x^2} \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, \boxed{\frac{1}{12}x^2 \leq F(x) \leq \frac{1}{2}x^2}$

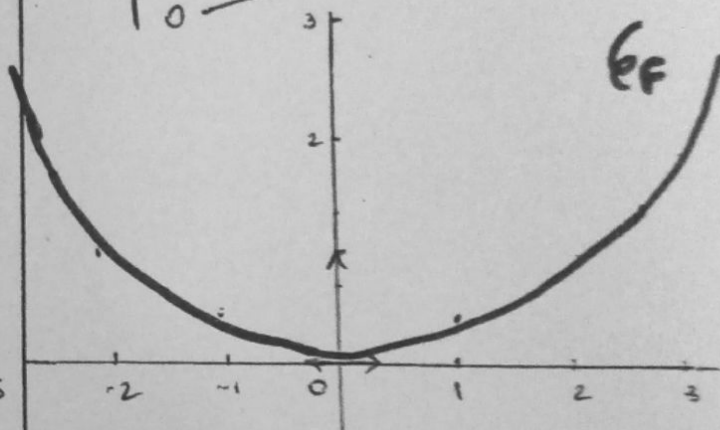
4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{12}x^2 = +\infty$ et $\frac{1}{12}x \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{1}{2}x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{12}x = +\infty \Rightarrow$ La courbe $\mathcal{C}_F$ admet au voisinage de $(+\infty)$ une branche infinie de direction $(\vec{Ox})$.

5) $D_f = \mathbb{R}, F: \text{paire} \Rightarrow D_F = \mathbb{R}_+$

$$F \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+, F'(x) = f(x) = \frac{x}{4 + \cos x}$$

x	0	$+\infty$
F'	0	+
F	0	$+\infty$



Exercice N° 12 :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \quad D_f = \mathbb{R}$$

1) on a : $x^2 + 2x + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f \text{ est } \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \Rightarrow f$ admet au moins une primitive F dérivable sur $\mathbb{R}$

or $F(-1) = 0 \Rightarrow F$ est unique

2) a) $\varphi(x) = F(-2-x) + F(x)$

$$\varphi \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\varphi'(x) = -F'(-2-x) + F'(x)$$

$$= -f(-2-x) + f(x)$$

$$= \frac{-1}{(-2-x)^2 + 2(-2-x) + 2} + \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

$$= \frac{-1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{x^2 + 2x + 2} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

en particulier $\varphi(-1) = k$ $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow k=0 \\ \text{ou } \varphi(-1) = F(-1) + F(-1) = 0 \end{array} \right.$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = F(-2-x) + F(x) = 0$
 $\Rightarrow I(-1, 0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}_F$

3) $G(x) = F\left(\frac{-x}{x+1}\right) + F(x)$ / $x \in]-1, +\infty[$

car $x \mapsto \frac{-x}{x+1} \in]-1, +\infty[$

$\& \left(\frac{-x}{x+1}\right) \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_F$

$\Rightarrow G$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$

$$G'(x) = \left[F\left(\frac{-x}{x+1}\right)\right]' + [F(x)]'$$

$$= \frac{-1}{(x+1)^2} F'\left(\frac{-x}{x+1}\right) + F'(x)$$

$$\Rightarrow G'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} f\left(\frac{-x}{x+1}\right) + f(x)$$

$$= \frac{-1}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{-x}{x+1}\right)^2 + 2\left(\frac{-x}{x+1}\right) + 2} + \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

$$= \frac{-1}{x^2 - 2x(x+1) + 2(x+1)^2} + \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

$$\Rightarrow G'(x) = \frac{-1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{x^2 + 2x + 2} = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-1, +\infty[, \boxed{G'(x) = 0}$$

d'où $G(x) = k' = G(0) = 2F(0)$

4) $H(x) = F(\tan x - 1)$ $\mathcal{D}_H =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

a) car $x \mapsto \tan x - 1 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\& (\tan x - 1) \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_F$

$\Rightarrow H \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$H'(x) = (1 + \tan^2 x) \cdot f(\tan x - 1)$$

$$= \frac{1 + \tan^2 x}{(\tan x - 1)^2 + 2(\tan x - 1) + 2} = \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad H'(x) = 1$$

d'où $H(x) = x + k''$

ou $H(0) = F(-1) = 0 = k''$

donc : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\boxed{H(x) = x}$

b) $H\left(\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\tan \frac{\pi}{4} - 1\right) = F(0) = 0$
 $\& H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow F(0) = \frac{\pi}{4}$$

ou $G(0) = 2F(0) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

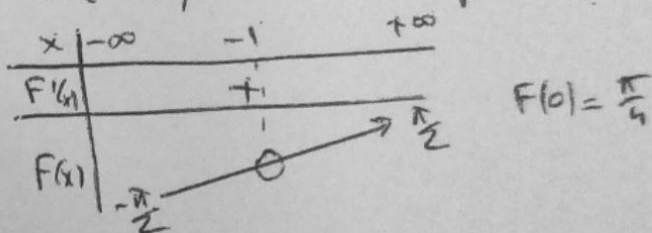
donc : $\boxed{G(0) = \frac{\pi}{2}}$

5) $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} F(x) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} F(\tan t - 1)$
 $= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} H(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} t = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \Delta: y = \frac{\pi}{2}$ Asymptote horizontale de $\mathcal{C}_F$ car voir image de $(+\infty)$

• F défini sur $\mathbb{R}$ / $F'(x) = f(x) > 0$

$I(-1, 0)$: centre de symétrie pour $\mathcal{C}_F$



$$T_I: y = F(-1)(x+1) + F(-1)$$

ou $F'(-1) = f(-1) = 1$ & $F(-1) = 0$

$$\Rightarrow T_I: \boxed{y = x + 1}$$

